Subtraktionsaufgaben können durch Abziehen oder Ergänzen gelöst werden, ob es um den Zehnerübergang in der 1. Klasse geht oder um die schriftliche Subtraktion.

P Zu finden unter:
www.grundschulmagazin.de/gsm20110135

Die Materialien zu diesem Beitrag
M 1 Rechenwege beim Minusrechnen
M 2 Rechenwege: Minusaufgaben am Rechenstrich
M 3 Unterschiede berechnen
M 4 Befragung von Kindern zur Subtraktion P
M 5 Befragung, bei der Kinder Subtrahieren und Ergänzen vergleichen sollten P

Mathematik: Grundrechenarten Praxis Mathematik 3–4

Subtraktion durch Abziehen oder Ergänzen

Entbündeln und/oder »eins gemerkt«

Renate Motzer **Abziehverfahren mit Entbündelungstechnik oder Ergänzungsverfahren mit Erweiterungstechnik – immer wieder gibt es Diskussionen und die Bestimmungen hierzu sind nicht mehr überall gleich. Das Abziehverfahren entspricht einem wirklichen Wegnehmen und kann so inhaltlich von den Kindern wesentlich besser verstanden werden als die Kunstgriffe des Ergänzungsverfahrens mit Erweiterungstechnik. Trotzdem ist es nicht unumstritten. Das Ergänzen sollte seinen Wert (auch für den Alltag) nicht verlieren.**

Übersicht über die verschiedenen Techniken der schriftlichen Subtraktion

Am Beispiel 742 – 457 soll gezeigt werden, dass es nicht nur diese beiden im bayerischen Lehrplan erwähnten Verfahren gibt, sondern mindestens sechs Deutungen.

Borgetechniken (Entbündeln)

Wegnehmverfahren

2 E – 7 E geht nicht. Ein Zehner wird entbündelt: Es bleiben 3 Z übrig …

Ergänzungsverfahren

Von 7 E auf 2 E kann man nicht ergänzen, von 7 E auf 12 E fehlen 5 E. Dann hat man schon einen Zehner, man muss also nur noch auf die 3 weiteren ergänzen …
Vollständig geschrieben sieht es so aus:

	H	Z	E
	6	13	12
	~~7~~	~~4~~	~~2~~
–	4	5	7
	2	8	5

Die ursprüngliche Zahl ist umgewandelt worden: 7 H 4 Z 2 E sind in wertgleiche 6 H 13 Z und 12 E gewechselt worden.

Erweiterungstechnik (gleichsinniges Verändern)

Wegnehmverfahren

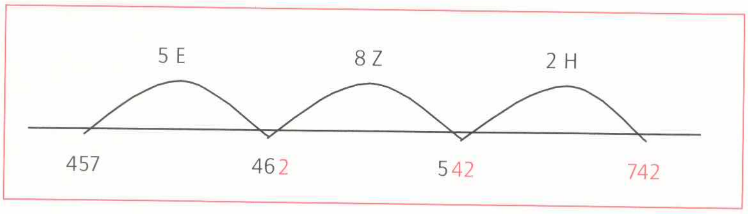
Von 2 E kann man nicht 7 E wegnehmen. Also nehmen wir 10 E beim Minuenden und zum Ausgleich 1 Z beim Subtrahenden dazu. 12 E – 7 E = 5 E …

Ergänzungsverfahren

Von 7 E kann man nicht auf 2 E ergänzen. Wir nehmen 10 E im Minuenden und zum Ausgleich 1 Z beim Subtrahenden dazu. Von 7 E auf 12 E fehlen 5 E. Inzwischen haben wir 6 Z. Von ihnen kann man nicht auch 4 Z ergänzen …

Auffülltechnik

Der Subtrahend soll zum Minuend aufgefüllt werden. 457 + X = 742. Der Minuend wird nicht verändert. Es sind 7 E. Am Ende sollen es 2 E sein, also nimmt man 5 E dazu. Damit hat man aber auch »einen Zehner überschritten«, 1 Z mehr, ist also schon bei 6 Z. Mögliche Sprechweise: »von 7 (E) auf 2 (E) fehlen 5 (E), ein Zehner weiter«. Letztendlich sollen es 4 Z sein, also legt man 8 Z dazu. Damit hat man einen »Hunderter überschritten«, also 1 H mehr. »Von 6 (Z) auf 4 (Z) fehlen 8 (Z), ein Hunderter weiter.« Nun sind es schon 5 H, es fehlen also noch 2 H auf die gewünschten 7 H. »Von 5 (H) auf 7 (H) fehlen 2 (H)«. Halbschriftlich notiert (zur Herleitung des Verfahrens):



	H	Z	E
	7	4	2
–	4	5	7
	1	1	
	2	8	5

In der schriftlichen Form (statt »1 gemerkt« könnte man auch »1 weiter« sagen):
Dies entspricht auch der schriftlichen Form bei der Erweiterungstechnik (II.), wenn man die von außen hinzugefügten 10 E und 10 Z nicht notiert. Man beachte allerdings, dass bei der Auffülltechnik von außen nichts dazugegeben wird.

Diese fünf Techniken sind diejenigen, die üblicherweise in der Literatur zu finden sind (z. B. Padberg, Didaktik der Arithmetik). Im (Schul-)Alltag findet sich aber auch manchmal folgende Version, die sich Lehrer oder Schüler selbst zurechtgelegt haben (dies war auch meine persönliche Deutung, als ich vor etlichen Jahren zum ersten Mal wieder gefragt wurde, welche Bedeutung das Eins-Gemerkt für mich bei der Subtraktion habe):

Wegnehmen mit Merkhilfe

2 E – 7 E geht nicht, also muss ich einen Zehner entbündeln. Dies schreibe ich mir als »1 gemerkt« auf. 12 E – 7 E = 5 E.
Bei den Zehnern muss ich insgesamt 6 Z abziehen, denn einen habe ich vorher schon weggenommen zum Entbündeln und 5 sind laut Aufgabe noch wegzunehmen. Dieses geht wieder nicht, also muss ein Hunderter entbündelt werden (»1 gemerkt«).
14 Z – 6 Z = 8 Z.
Von den ursprünglichen 7 H sind nun 4 H + 1 H wegzunehmen. Es bleiben noch 2 H. Schreibweise: wie bei 2 und 3, wobei »1 gemerkt« aber »1 entbündelt« bedeutet und auch so gesprochen werden könnte. Es sei darauf hingewiesen, dass bei der letzten Version, anders als bei der Erweiterungstechnik oder der Auffülltechnik, in der Vorstellung der Subtrahend nicht wirklich verändert wird, sondern bei Zehnern u Hundertern nicht eine, sondern die Su me aus zwei Zahlen subtrahiert wird, Summe aus dem, was inzwischen entb delt wurde und was laut Subtrahend a ziehen ist.
Während bei der ersten Strategie bei d und H (a –1) – b gerechnet wurde, wurd hier a – (1 + b) gerechnet. Dass man ers beide Subtrahenden addiert und sie da gemeinsam subtrahiert, ist ja eine Stra gie, die man sonst auch oft zunutz macht.

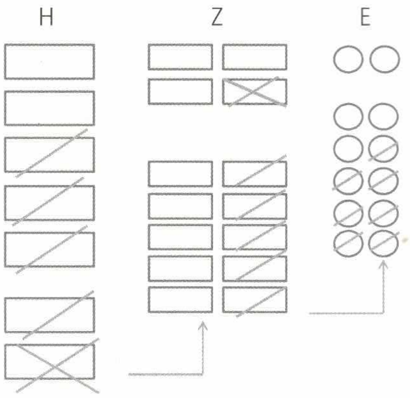
Einkleidung und ikonische Darstellun für Technik 1 und 4

Will man Abziehen mit Entbündeln ein führen, kann man die Aufgabe auch so deuten: die ursprünglichen 742 sollten zwei Mengen aufgeteilt werden, wobei eine Menge 457 enthält. Wie groß ist di andere Menge? Versteht man die Aufga so, sind am Schluss noch beide Teilmen gen zu sehen.

Die Aufgabe könnte so »eingekleidet« werden: Michael hat 742 € Bargeld daheim (sieben Hunderterscheine, vier Zehnerscheine und zwei Eurostücke). erwartet die Lieferung eines Fahrrads, welches 457 € kostet und bar bezahlt werden muss. Vermutlich kann der Lie ferant nicht wechseln, deshalb will Mi chael das nötige Geld genau daliegen haben. Da das zunächst nicht möglich ist, muss er auf der Bank einen Zehner und einen Hunderter wechseln lassen. Er hat am Schluss auf einem Häufchen die 457 € für das Fahrrad, auf dem anderen die restlichen 285 €.
Zusammen sind das 742 €, aber als 6 H 13 Z und 12 E.

Betrachtet man die ikonische Version di ser Handlung (siehe Abb. 2), so ist das kr tig Durchgestrichene nicht mehr vorhan den, das leicht Durchgestrichene bildet den Subtrahenden. Nichtdurchgestriche nes ergibt den Rest, das Ergebnis der Minusaufgabe.

Literatur
- Joke Torbebeyns/Bert De Smedt/Greet Petres,/Pol Ghesquiere,/Lieven Verschaffel: Indirect Addition: Theoretical, Methodological und Educations Considerations, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010
- Friedhelm Padberg: Didaktik der Arithmetik, Spektrum Akademischer Verlag 2005[3]



	H	Z	E
	7	4	2
–	4	5	7
	1	1	
	2	8	5

Doch könnte man das, was auf diesem Bild aufgezeichnet ist, aber auch so aufschreiben:

Man sieht auf dem Bild, dass 7 E durchgestrichen sind und 5 bleiben übrig. Bei den Zehnern sind 5 + 1 durchgestrichen und 8 nicht und bei den Hunderten sind 4 + 1 durchgestrichen und 2 bleiben übrig. Genau das ist der Rechnung zu entnehmen. Die »alte« Schreibweise mit »1 gemerkt« könnte also mit dem »neuen« Abziehverständnis als durchaus kompatibel gesehen werden. Wer aus ästhetischen Gründen die frühere Schreibweise vorzieht, könnte es den Kindern trotzdem inhaltlich nachvollziehbar als Wegnehmen erklären. »1 gemerkt« heißt: ich merke mir, dass ich zum Entbündeln schon einen weggenommen habe.

Eine Befragung von Kindern (siehe M 4), die nach dieser Methode unterrichtet wurden, zeigte, dass sie am Ende der 4. Klasse immer noch gut damit umgehen konnten und vor allem ihr Vorgehen immer noch inhaltlich begründen konnten.

Ergänzen versus Subtrahieren

Abgesehen von ganz vereinzelten Schülern haben die beiden im Jahr 2008 befragten Klassen die Aufgaben durch Subtraktion gelöst. Dass die Erwachsenen stattdessen ergänzen, kam niemandem in den Sinn. Selbst bei der Aufgabe »Tom ist 1998 geboren. Wie alt war er im Jahr 2004?« haben viele schriftlich subtrahiert. Einige haben sich dabei aus verständlichen Gründen verrechnet, konnten die Aufgabe aber lösen, als sie gebeten wurden, es im Kopf zu probieren. Dann gelang es durch Ergänzen.

Nun zeigen Erfahrungen ab der ersten Klasse, dass etliche Kinder sich mit dem Ergänzen (8 + wie viel = 12) leichter tun als mit dem Abziehen (12 – 8). Gerade in Einkaufssituationen erlebt man auch im Alltag häufig, dass die Verkäuferin ergänzend rechnet. Man kann dies zum Teil schon beim Spielen von Einkaufssituationen in der ersten Klasse erleben:

Der Gegenstand kostet 6 €. Ein Mitschüler zahlt mit einem 10 €-Schein. Wie viel bekommt er zurück? Antwort: 4 €. Als Begründung sagt der Schüler: »6 € + 4 € = 10 €«, nicht »10 € – 6 € = 4 €«.

Es wird häufig gesagt, dass die schriftliche Subtraktion als Abziehen mit Entbündelungstechnik mehr den Alltagserfahrungen des Wegnehmens entspricht. Aber es gibt auch viele Alltagserfahrungen des Ergänzens:

- Man möchte etwas Größeres kaufen, hat aber den ganzen Betrag noch nicht zusammen. Wie viel fehlt noch?
- Es sind bisher soundso viele Eintrittskarten verkauft, soundso viele Plätze sind insgesamt vorhanden. Wie viele Karten können noch verkauft werden?
- Man schaut bei Auto/Fahrrad zu Beginn der Fahrt auf den Kilometerzähler, ebenso am Ende. Wie viele Kilometer hat man zurückgelegt?

Eine solche Aufgabe mit Hilfe der Erweiterungstechnik zu lösen, entspricht nicht dem Inhalt der Aufgabe. Wohl aber kann die Auffülltechnik genutzt werden. Sie kann auch gut, wie in 3 erläutert, mit dem Rechenstrich in Verbindung gebracht werden. Besonders gut empfiehlt sich die Auffülltechnik (und macht die Entbündelungs-technik Probleme), wenn es um das Auffüllen auf runde Beträge geht (ganze H oder ganze T).

Möglichkeiten, den Zusammenhang zwischen Abziehen und Ergänzen schon ab der ersten Klasse zu behandeln, werden auf M 1 – M 3 vorgestellt.

Bei einer Befragung von Dritt- und Viertklasskindern im Sommer 2010 sagten die meisten Kinder, dass die Subtraktionsaufgabe und die Ergänzungsaufgabe für sie gleich schwer sind. Manche tun sich mit der ungewohnten Ergänzungsaufgabe, die ihnen gestellt wurde, aber etwas schwerer. Viele schreiben sie als Subtraktionsaufgabe um und freuen sich, dass sie die Aufgaben durch diesen Trick lösen können (zu Details dieser Befragung siehe M 5). ■

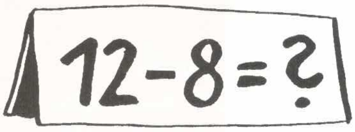
Mathematik: Grundrechenarten Praxis Mathematik 3-4

Autorin
Dr. Renate Motzer
Didaktik der Mathematik
Universitätsstr. 14
86159 Augsburg
E-Mail: Renate.Motzer@math.uni-augsburg.de

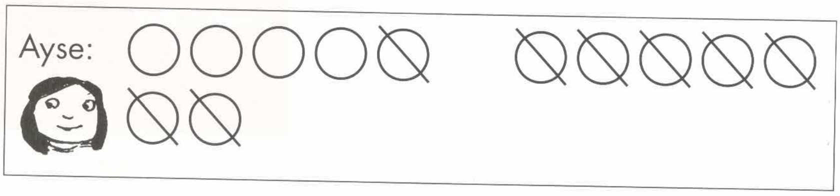
Name

Klasse Datum

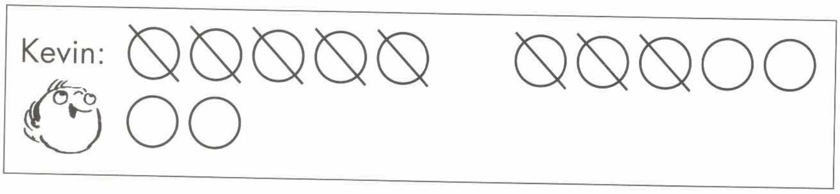
Rechenwege beim Minusrechnen



Ayse und Kevin rechnen mit Plättchen



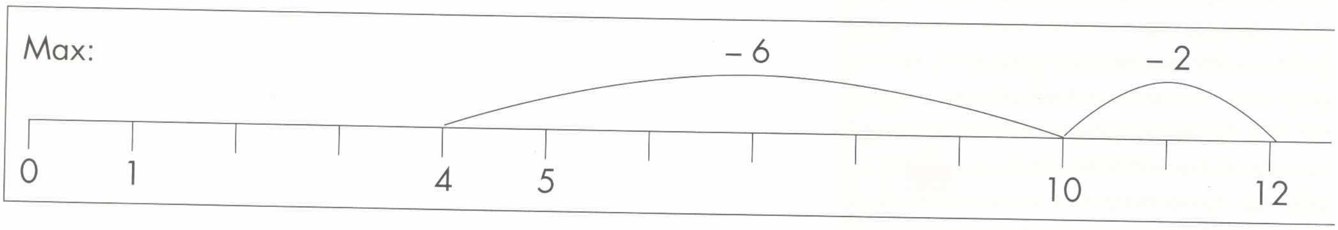
12 – 2 = 10, 10 – 6 = 4

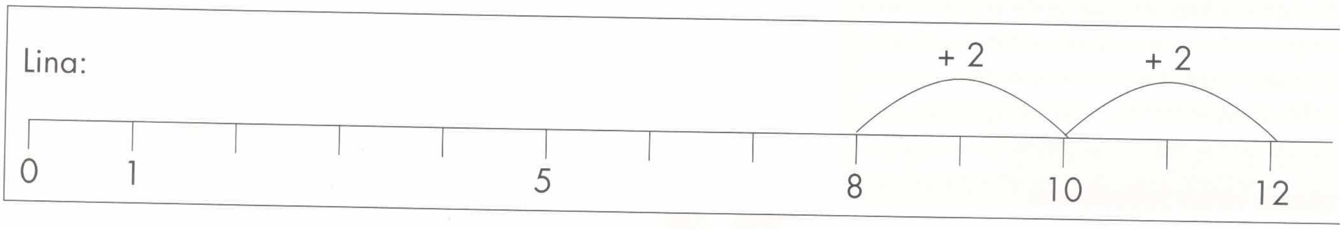


8 + 2 = 10, 10 + 2 = 12,
also 8 + 4 = 12, also 12 – 8 = 4

1. Erkläre, wie Ayse und wie Kevin rechnet.

Max und Lina rechnen lieber am Zahlenstrahl:





(2 + 2 = 4, also 12 – 8 =

2. Welche Kinder rechnen gleich? Erkläre?

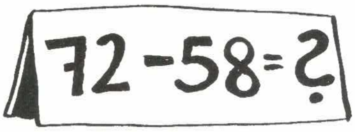
3. Rechne auf zwei Wegen:

13 – 7=	14 – 5 =	11 – 9 =
20 – 4 =	17 – 3 =	16 – 5 =
20 – 14 =	17 – 13 =	16 – 15 =

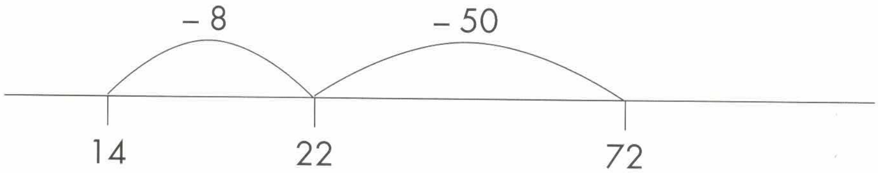
4. Welcher Weg gefällt dir bei welchen Aufgaben besser?

Name ______________________ Klasse ________ Datum ________

Rechenwege: Minusaufgaben am Rechenstrich



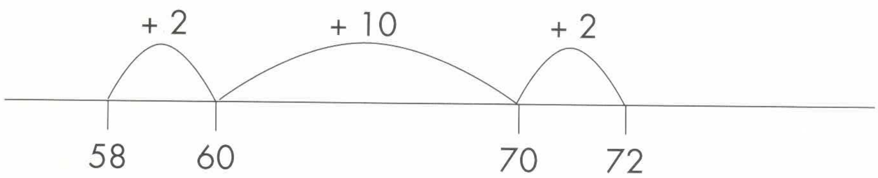
Ben rechnet: 72 – 50 = 22, 22 – 8 = 14



Maria rechnet: 72 – 2 = 70, 70 – 50 = 20, 20 – 6 = 14

1. Zeichne den Rechenstrich für Marias Rechnung:

Erkan rechnet: 58 + 2 = 60, 60 + 10 = 70, 70 + 2 = 72. (2 + 10 + 2 = 14)



Gülcan rechnet: 58 + 4 = 62, 62 + 10 = 72 (4 + 10 = 14)

2. Zeichne den Rechenstrich für Gülcan:

---

3. Wie rechnen die Kinder? Wie rechnest du?

4. Rechne auf zwei Wegen mit dem Rechenstrich:

34 – 22=	68 – 46 =	75 – 34 =	83 – 31 =
32 – 24 =	66 – 48 =	74 – 35 =	81 – 33 =
32 – 29 =	61 – 58 =	73 – 68 =	82 – 77 =
32 – 8 =	61 – 7 =	73 – 4 =	82 – 5 =

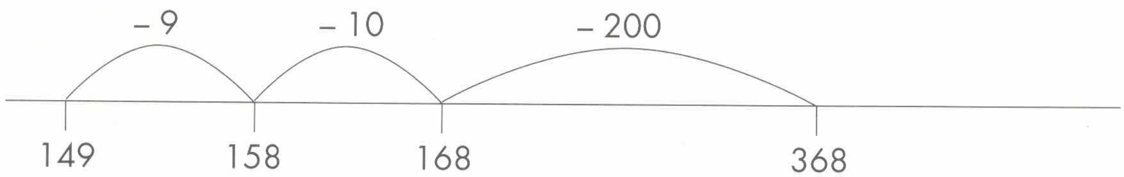
Welcher Weg gefällt dir bei welcher Aufgabe besser?

Name ______________________ Klasse ________ Datum ________

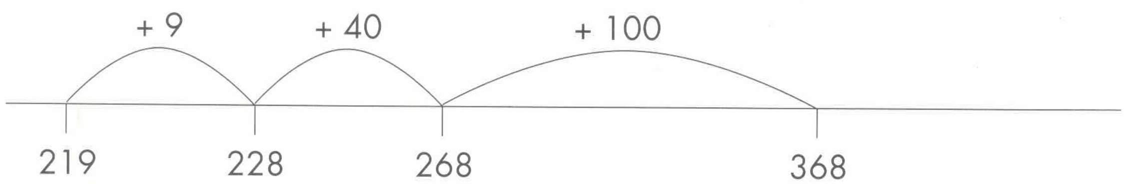
Unterschiede berechnen

Der Olympiaturm in München ist 291 m hoch, der Berliner Fernsehturm 368m. Berechne den Unterschied mit Hilfe des Rechenstrichs.

Canan rechnet: 368 – 219 =

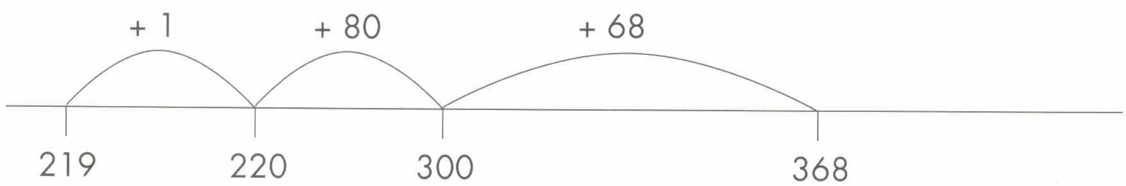


Sebastian rechnet: 219 + _____ = 368



(9 + 40 + 100 = 149)

Mila:



(1 + 80 + 68 = 149)

1. Erkläre, wie die Kinder gerechnet haben.

Der Kölner Dom ist 157 m hoch, das Ulmer Münster 161m. Berechne den Unterschied zwischen diesen Kirchtürmen und die Unterschiede zum Münchner Olympiaturm und zum Berliner Fernsehturm.

2. Berechne den Unterschied zwischen:

245 und 467	456 und 698	23 und 256
245 und 413	456 und 712	23 und 305
298 und 304	488 und 502	98 und 207